フィボナッチ数列による面積のパラドックスの考察の研究

石川県立
小松高等学校

1. 研究の背景

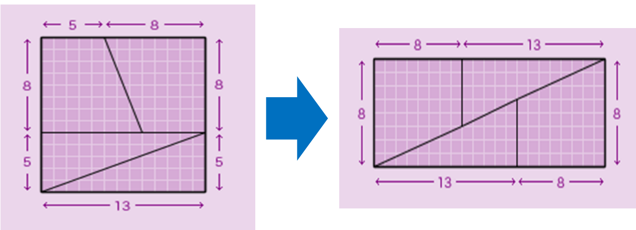
フィボナッチ数列には、その数列上の数を一辺とする正方形をある切り分け方で切り、それらをつなぎ合わせた図形が元の正方形と面積が1違うという性質がある。

2. 目的

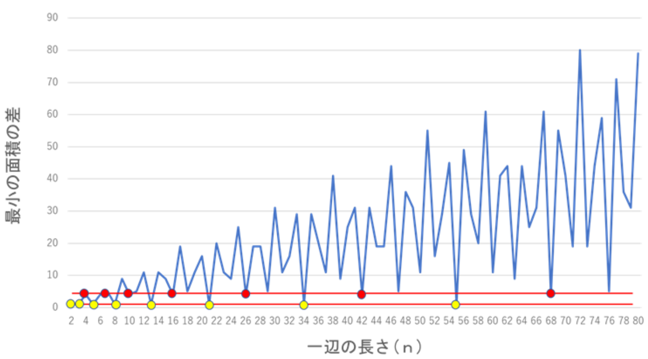
面積の差が1になるのはフィボナッチ数列だけなのか、またフィボナッチ数列以外で面積のパラドックスに当てはめるとどうなるのかを調べること。

3. 方法

1. 一辺がnの正方形を考える
2. 足してnになる組み合わせをすべて考え長方形の面積を求める。
3. 正方形の面積の差の最小値を求める
4. nを2～80で調べる



4. 結果・考察



・面積の差の最小値が1になるのはnがフィボナッチ数列の時のみである。
・面積の差が同じである一辺nを並べてみると、フィボナッチ数列のような隣接3項間漸化式が得られた。

Ex)差が4のとき → n＝4、6, 10, 16, 26, 42、･･･

5.証明

$a_1=a, a_2=b$をみたすフィボナッチ数列の一般項A_nは、$a_1=a_2=1$をみたすフィボナッチ数列の一般項a_nを用いて

$$A_{n+2}=ba_{n+1}+aa_n \cdots (*)$$

と表すことができる。
∴もとの正方形とつなぎ合わせてできた長方形の面積の差は$|A_{n+1}A_{n-1}-{A_n}^2|$となり、$(*)$を用いて

$|b^2-ab-a^2|$ → nの値に関与しない。

→ 面積の差が同じである一辺nを並べると、フィボナッチ数列のような隣接3項間漸化式が現れることが証明された。

面積の差が1になる場合を考えると、

$|b^2-ab-a^2|=1 \Leftrightarrow b=\frac{a+\sqrt{5a^2\pm4}}{2}$

０以上の自然数kを用いて

$$5a^2\pm4=k^2 \Leftrightarrow \left(\frac{k}{2}-\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{k}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)=\pm1$$

この式をみたす(k,a)の組を(a_n,b_n)とおくと
最小解は$(k,a)=(1,1)$ より
$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n=\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2}\sqrt{5}$ をみたすので漸化式を作り解くことで$\begin{cases}a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(a_1=1,a_2=3)\\ b_{n+2}=b_{n+1}+b_n(b_1=1,b_2=1)\end{cases}$

↓

$a_{n+2}=3b_{n+1}+b_n$ と表される。

$\therefore\ b=\frac{a+k}{2}=2b_{n+1}+b_n$　$b=c_{n+2}$とおくと
$c_{n+2}=2b_{n+1}+b_n(c_1=1,c_2=2)$となり、
$(*)$の逆より$(a,b)=(b_n,c_n)=(b_n,b_{n+1})$ と求まる。
∴面積の差の最小値が1になるのはnがフィボナッチ数列の時のみであることが証明された。

6.今後の展望

立方体にも同様のパラドックスを当てはめるとどのような結果になるのか研究していきたい。

7.参考文献

http://www20.big.or.jp/~morme/puzzle/column/002/002.html

石川県立小松高等学校　03

フィボナッチ数列による面積のパラドックスの考察

抄録

本研究ではエクセルを利用してある正方形を切り取りできた長方形の面積と元の正方形の面積の差について調べた。差が１であったのはフィボナッチ数列の数以外存在しないことが分かった。また、できた長方形と元の正方形との面積の差を数式で表すことができた。

１．研究の背景と目的

フィボナッチ数列にある数が一辺となる正方形をうまく切り取り長方形に組み合わせると面積の差が１であることが知られている。これより本研究では、差が１になるのはフィボナッチ数列だけなのか、またフィボナッチ数列以外の数では関係性がないのかを調べることを目的とした。

２．方法

図１の正方形（一辺をｎとする）を切り取り図２の長方形を作るにあたって一辺を 1～（n-1）の長さで切り分け、長方形の面積と元の正方形の面積の差をとる。1～（n-1）の面積の差で最小のものを調べる。（２≦n≦80）

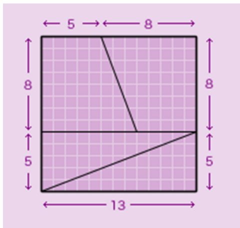


図１

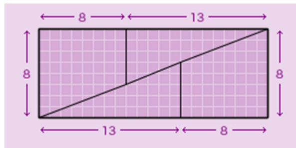


図２

３．結果

n＝２～80 までの数では面積の差が図３のようになることが分かり、フィボナッチ数列の数のみ、面積の差が１となった。

また、フィボナッチ数列以外の数では面積の差が等しいｎを並べると、フィボナッチ数列と同様の隣接３項間漸化式が得られた。

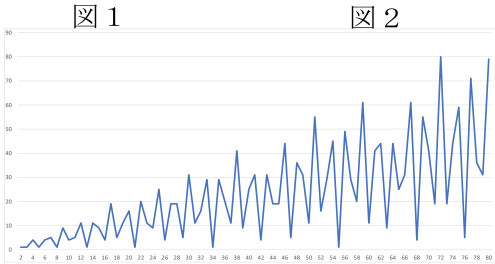


図３

４．考察

$A_1 = a$ $A_2 = \mathrm{b}$を満たすフィボナッチ数列の一般項をA_nとし、A_nを求め、関係性を示す数式を求めると、面積の差が$|b^2 - ab - a^2|$と求められた。

また、求められた数式から面積の差が１となるのはフィボナッチ数列の数以外にないということが証明できた。

５．結論と今後の課題

フィボナッチ数列以外の数では面積の差が１とならなかった。またフィボナッチ数列の初項を変えたとき面積の差を数式で表すことができた。立方体にも同様のパラドックスを当てはめるとどのような結果になるのか研究していきたい。

６．参考文献

http://www20.big.or.jp/~morm-e/puzzle/column/002/002.html

７．キーワード

フィボナッチ数列　隣接３項間漸化式　面積のパラドックス